

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	3
2	Vorüberlegungen und Hilfsmittel.....	4
2.1	Die logistische Funktion.....	4
2.2	Iteration von Funktionen.....	5
2.3	Folgen und ihre Darstellungen.....	6
2.4	Grenzwerte.....	8
2.5	Attraktoren und Repeller.....	9
2.6	Deterministisches Chaos.....	9
3	Die Logistische Gleichung.....	10
3.1	Definition.....	10
3.2	Konvergenzverhalten.....	13
3.3	Informationen zum Feigenbaumdiagramm.....	15
4	Ausblick.....	16
4.1	Eigene Beobachtungen.....	16
4.2	Universalität.....	25
5	Fazit.....	25
6	Literatur und Quellen.....	26
7	Abbildungen.....	27
8	Schlusserklärung.....	28

1 Einleitung

„Not only in research, but also in the everyday world of politics and economics, we would all be better off if more people realised that simple nonlinear systems do not necessarily possess simple dynamical properties.“¹

Im Mathematikunterricht lernt man von der ersten Klasse an, dass einfache Operationen einfache Ergebnisse liefern. Man lernt die Addition, und betrachtet, was passiert, wenn man diese Operation, als Beispiel $4+x$ immer wieder wiederholt: Man startet mit 4 und bekommt $4+4=8$, $4+8=12$, usw. Diese Iteration (also das wiederholte Anwenden) führt zur nächsten Rechenart, der Multiplikation. Man lernt Addition und Multiplikation als Grundlage für lineare Funktionen kennen, irgendwann wird die Multiplikation iteriert und die Potenz- und Exponentialfunktionen rücken ins Bild. Alle diese Operationen sind berechenbar und einfach. Doch was würde passieren, wenn man als einfachste Potenzfunktion eine Parabel iteriert? Als Beispiel $4x-4x^2$? Start bei 0,4 und als nächstes $1,6-0,64=0,96$, dann ca.: 0,520; 0,998; 0,006; 0,25 und wie sollte man hier usw. schreiben? Ein Muster ist nicht zu erkennen, obwohl diese Zahlenfolge, die Teil der logistischen Gleichung ist, doch offenbar klar definiert ist. Spätestens seit dem bahnbrechenden Aufsatz des Biologen May von 1976² ist bekannt, dass einfache Rechenoperationen manchmal sehr komplexe Ergebnisse liefern. May trägt einen „evangelical plea“³ dafür vor, dass jeder Schüler und jede Schülerin sich mit der Logistischen Gleichung beschäftigen, weil es allgemeinbildend ist zu wissen, dass einfache Regeln zu komplexen und nicht vorhersehbaren Resultaten führen können.

In dieser Arbeit sollen daher Aspekte der logistischen Gleichung im Vordergrund stehen, die mit Mitteln der Schulmathematik berechnet oder mit einem einfachen Programm gezeichnet werden können. Als grafische Darstellung wird das Bifurkations- oder Feigenbaumdiagramm als Anhaltspunkt für viele Argumente genutzt.

Um dieses Thema im Folgenden darstellen zu können, werden zuerst im zweiten Kapitel einige Grundlagen gelegt, im dritten Kapitel wird die Gleichung als Grenzprozess mit einigen ihrer bekannten Eigenschaften vorgestellt. Den Schwerpunkt im vierten Teil bilden dann eigene Rechnungen, was zum Schluss noch eingeordnet werden soll.

1 Robert May(10 Juni 1976): Simple mathematical models with very complicated dynamics, in Nature V. 261, S. 459–467, Hier S. 467

2 May, S. 467.

3 May, S. 459.

2 Vorüberlegungen und Hilfsmittel

2.1 Die logistische Funktion

Pierre-François Verhulst war der erste Mensch, der sich mit der logistischen Funktion beschäftigte. Seine Überlegungen hat er in einem Aufsatz 1838 publiziert.⁴ Hierin behandelt er Wachstumsmodelle von Populationen. Wie Verhulst feststellt, ist die Wachstumsgeschwindigkeit von Populationen zwar proportional zu ihrer Größe, gleichzeitig wird ihr Wachstum über alle Maßen aber verhindert. Demnach müsste es eine begrenzende Funktion geben, die eben dieses Wachstum beschreibt. Dieses Erkenntnis formuliert er in der Differenzialgleichung⁵

$$p'(t) = m \cdot p(t) - \varphi_p(t), \quad (1)$$

wobei t die Zeit, $p(t)$ die Populationsgröße, m der Proportionalitätsfaktor und φ_p die begrenzende Funktion ist. Eine quadratische Funktion ist eine Funktion die schneller als linear wächst und entsprechend wählte Verhulst als einfaches Beispiel $\varphi_p(t) = n \cdot p^2(t)$.⁶ Damit vereinfacht sich die Gleichung (1) zu:

$$p'(t) = n \cdot p(t) \cdot \left(\frac{m}{n} - p(t) \right). \quad (2)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist die logistische Funktion. Diese beschreibt ein Standardwachstumsmodell, das z. B. für die Populationsentwicklung von Tierarten in einem begrenzten Lebensraum gilt.

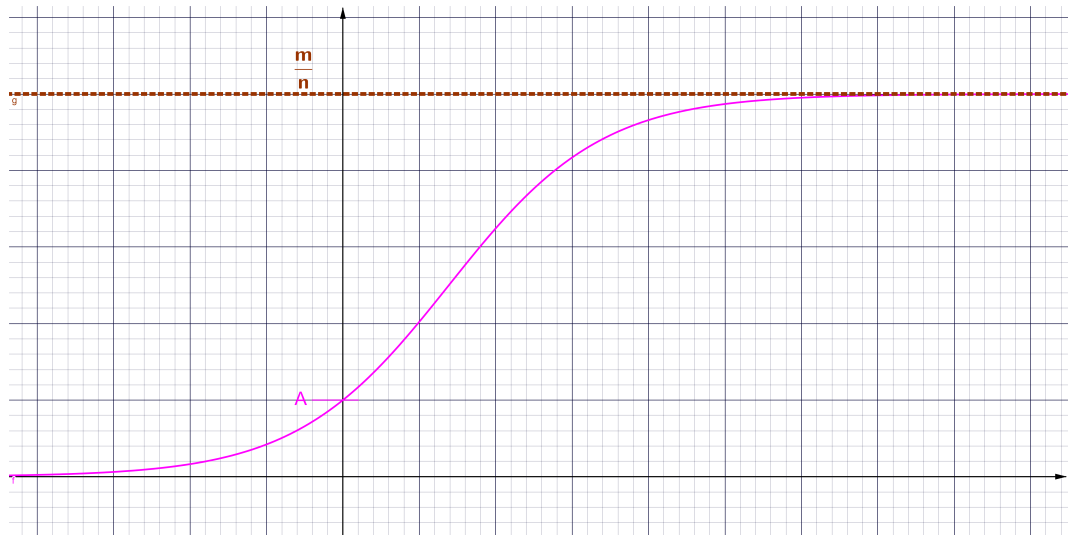


Bild 1

4 Verhulst, P.-F. (1838): Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, in: Correspondence mathématique e physique, 10(=S.3 T. 2), S. 113-121.

5 Körner, H. u.a (2019): Mathematik neue Wege eA, Braunschweig, S. 160.

6 Verhulst, S. 115.

Der Funktionsterm dazu lautet:⁷

$$p(t) = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{m}{A \cdot n} - 1 \right) \cdot e^{-m \cdot t}}$$

Hierbei ist A der Anfangsbestand und $\frac{m}{n}$ der Grenzbestand. Dieses Wachstum steigt zunächst gleichmäßig an, bis es ab dem Mittelpunkt zwischen Anfangs- und Grenzbestand wieder abnimmt. Der Graph nähert sich danach dem Grenzbestand immer weiter an, erreicht diesen aber nicht, vgl. Bild 1. Der Verlauf dieses Wachstums mit einer Grenze ist geordnet und gänzlich frei von Chaos.

2.2 Iteration von Funktionen

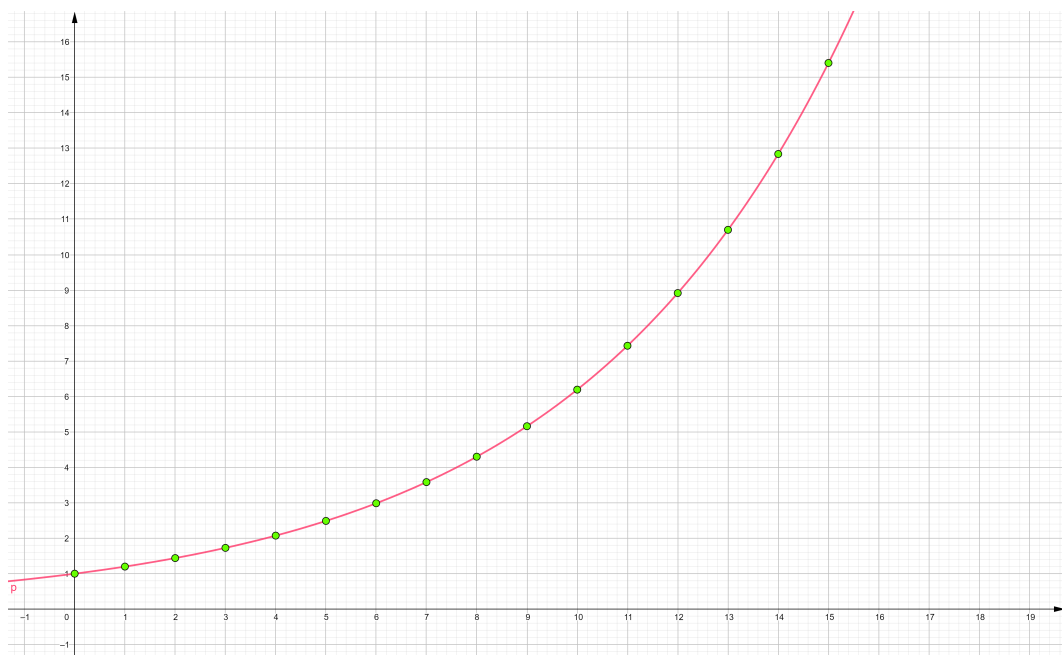


Bild 2

Anders als bei der logistischen Funktion führt Wachstum ohne Grenzen zu einer Funktion, die zu ihrer Wachstumsgeschwindigkeit proportional ist:

$$p'(t) = m \cdot p(t) \quad (3)$$

mit der bekannten Lösung des exponentiellen Wachstums $p(t) = m \cdot b^t$. Einfacher lässt sich dies durch den Vergleich von einer Kindpopulation p_{n+1} zu ihrer Elternpopulation p_n darstellen: Wenn zum Beispiel ein Wachstum von 20% vorliegt, gilt $p_{n+1} = 1,2 \cdot p_n$ oder im Allgemeinen

$$p_{n+1} = m \cdot p_n \quad (3')$$

⁷ Körner, S. 181.

Anders als in (3) wird in (3') die Population nicht mehr als Funktion, sondern als Zahlenfolge betrachtet. Bild 2 im Anhang zeigt die Funktion $p(t)$ in Rot und die Folge p_n in Grün mit $m=1,2$ und $p_0=p(0)=1$. Man sieht, dass bei der Funktion die Werte durchgehend sind, während die Folge einzelne Werte hat, welche auf der Funktion liegen.

2.3 Folgen und ihre Darstellungen

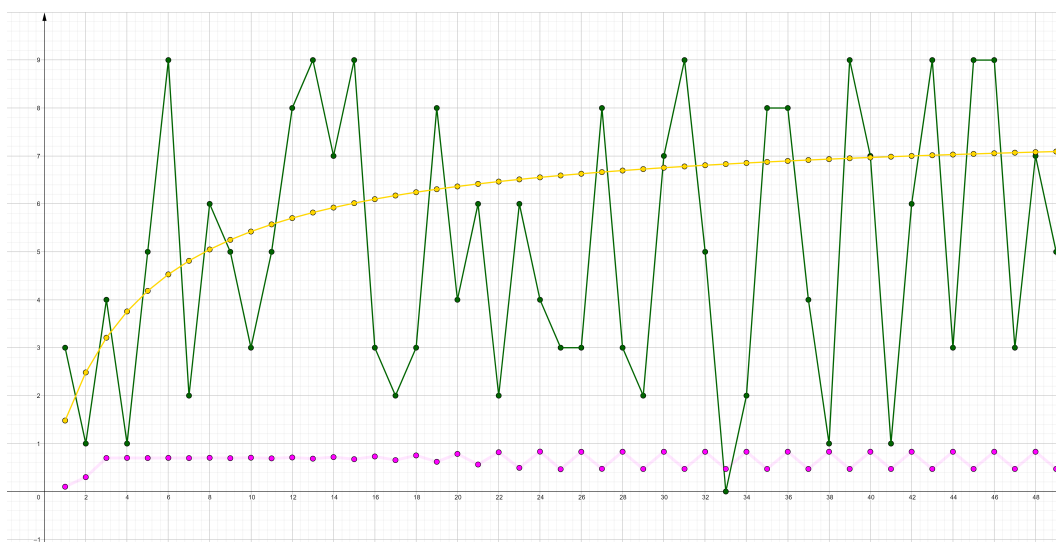


Bild 3

In der Mathematik werden häufig Folgen von Zahlen betrachtet. Diese werden typischerweise als eingeklammerter Buchstabe mit einem Index dargestellt, z.B. (a_n) wobei n ein Element der natürlichen Zahlen ist. Dabei sind die a_n die einzelnen Glieder der Folge. Mit $a_n = \frac{1}{n}$ wird also die Folge $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ beschrieben. Die einfachste Möglichkeit, eine Folge (a_n) grafisch darzustellen, ist die in einem Zeitdiagramm.⁸ Dabei wird n auf der x-Achse und a_n auf der y-Achse aufgetragen. Um die Veränderung der Folgenglieder zu verdeutlichen, werden diese in der Regel durch Strecken miteinander verbunden. Als Beispiel werden die drei Folgen (q_n) in Grün, (r_n) in Gelb und (s_n) in Pink in Bild 3 dargestellt. Dabei ist q_n die n -te Ziffer von π ,

$$r_n = \frac{77n}{10n+42} \text{ und } (s_n) \text{ die Iteration } s_{n+1} = 3,33 \cdot s_n \cdot (1 - s_n) \text{ mit dem Startwert } s_1 = 0,1.$$

Für eine Folge wie (s_n) , die wie in 2.2 aus Iteration entsteht, kann man auch ein Spinnwebdiagramm zeichnen. Das ist ein Graph, bei dem die „Entwicklung der Folgenglieder

⁸ Körner, S. 105.

in einem ‚Zickzackweg‘ anschaulich auf[gezeichnet werden]“.⁹ In der Folge (s_n) wird die Funktion $s(x)=3,4 \cdot x(1-x)$ iteriert. In das Spinnwebdiagramm wird der Graph der Funktion $y=s(x)$ und der Graph von $y=x$ in ein Diagramm gezeichnet. Dann beginnt man von einem Startwert auf der x-Achse aus, vertikal nach oben zu zeichnen, bis der Graph erreicht wird. Von dort zieht man eine horizontale Linie bis zum Graph $y=x$, da bei der Iteration aus dem y-Wert des vorherigen Schrittes der x-Wert des nächsten Schrittes wird. Von hier an wird das Verfahren wiederholt. Dieser Weg wird in Bild 4 für (s_n) dargestellt.

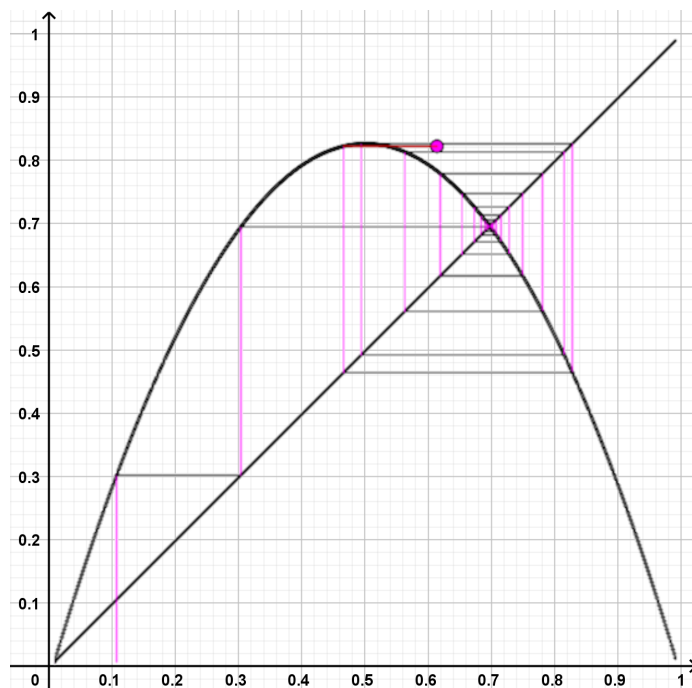


Bild 4

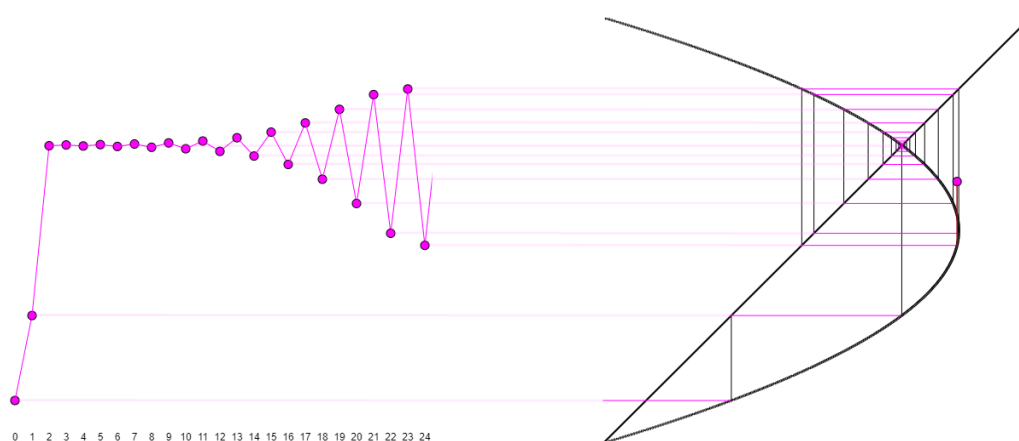


Bild 5

Um den Zusammenhang zwischen dem Spinnwebdiagramm und dem Zeitdiagramm erkennbar zu machen, werden im Spinnwebdiagramm die x- und y-Achsen getauscht und

⁹ Körner, S. 105.

die beiden Diagramme nebeneinander gesetzt. Nun entsprechen sich die y-Werte, wie es in Bild 5 gezeigt wird.

2.4 Grenzwerte

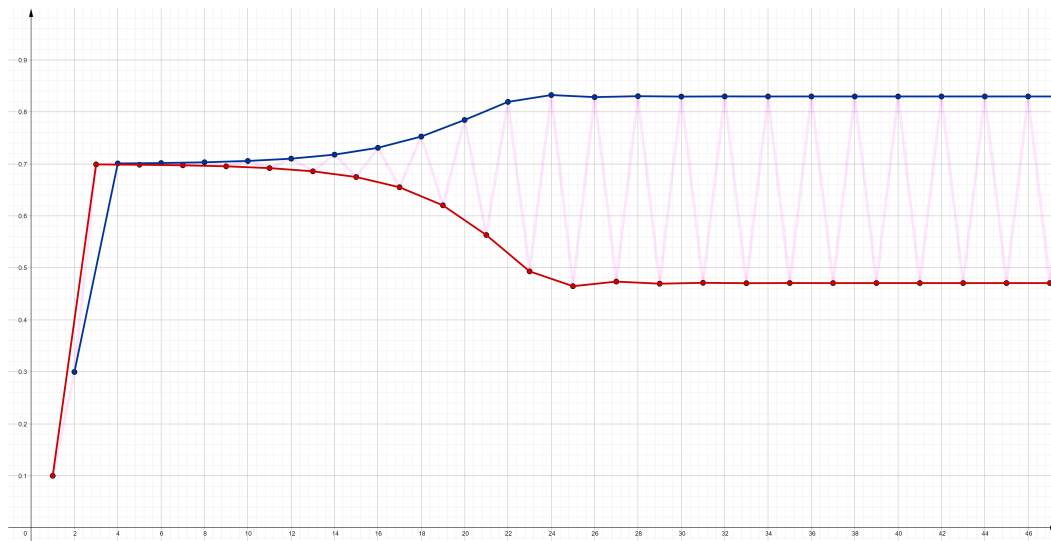


Bild 6

Besonders interessant an Zahlenfolgen ist ihr jeweiliges Verhalten, wenn n gegen unendlich geht. Entweder haben sie dann eine Konvergenz oder eben nicht. Wenn sie keine Konvergenz haben, sind sie divergent. Sie konvergieren gegen einen Grenzwert, wenn bei einem Abstand größer 0 vom Grenzwert endlich viele Folgenglieder eine größere Entfernung haben. Ein Beispiel dafür ist die Folge (r_n) aus Kapitel 2.3. Eine mögliche Art von Divergenz ist, dass sich die Folge abwechselnd zwei oder mehr Werten nähert, wie es bei (s_n) der Fall ist. Auch (q_n) nähert sich zehn Werten, jedoch gibt es bei dieser Folge keine Periode, anders als bei (s_n) , bei welcher sich alle geraden Werte einem Grenzwert und alle ungeraden einem anderen annähern. Diese Art der Divergenz heißt Grenzykel, dargestellt in Bild 6. In dieser Arbeit werden Folgen betrachtet, die durch die Iteration einer Funktion entstehen, also $x_{n+1} = s(x_n)$. Wenn es Werte x^* gibt, für die $x^* = s(x^*)$ gilt, so heißen diese Werte Fixpunkte. Bei der grafischen Iteration im Spinnwebdiagramm sind das die Schnittpunkte von $y = s(x)$ und $y = x$. Wenn die Iteration einen Grenzwert besitzt, so bedeutet dies im Spinnwebdiagramm, dass die Spinne sich nur noch sehr wenig bewegt, daher ist anschaulich klar, dass Grenzwerte von x_n Fixpunkte von $s(x)$ sein müssen.

2.5 Attraktoren und Repeller

Wenn eine Folge mit $x_0 = x^*$ bei einem Fixpunkt startet, so ist dieser offenbar auch Grenzwert dieser Folge, denn dann sind alle $x_n = s(x_{n-1}) = x^*$. Wenn nun aber nicht exakt bei einem Grenzwert, sondern nur in dessen Nähe gestartet wird, zeigt die Folge ein anderes Verhalten: Bei manchen Fixpunkten nähert sich die Folge diesen an und konvergiert – dieser Fixpunkt heißt dann Attraktor – und bei anderen Fixpunkten, den Repellern, bewirkt eine minimale Abweichung, dass die Folge sich immer weiter von dem Fixpunkt entfernt. Ein Beispiel für einen Repeller ist der Fixpunkt von (s_n) bei 0,7 in Bild 5. Nach zwei Iterationen befinden sich die Folgenglieder dicht beim Schnittpunkt, aber die Abweichung wird dann immer größer. Mathematisch sind diese beiden Arten von Fixpunkten leicht zu unterscheiden, indem man die Ableitung $s'(x)$ der zu iterierenden Funktion berechnet: Falls x^* ein Attraktor ist, so gilt $|s'(x^*)| < 1$, für Repeller gilt $|s'(x^*)| > 1$.¹⁰ Der Beweis würde hier zu weit führen, aber Bild 7 stellt die Situation anschaulich dar.

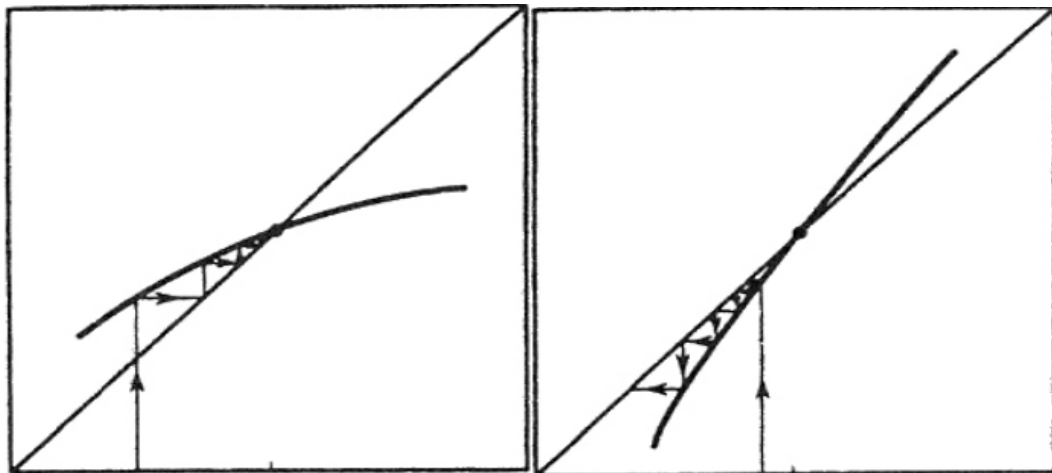


Bild 7

2.6 Deterministisches Chaos

In 2.5 wurde schon eine Situation betrachtet, die zwei Kriterien erfüllt: Einerseits gilt Determinismus, d.h. wenn die Ausgangsbedingungen exakt bekannt sind, dann kann jeder folgende Zustand daraus berechnet werden. Andererseits kann eine minimale Änderung der Ausgangsbedingungen eine große Änderung späterer Werte bewirken, denn x^* bleibt fix, während alle anderen Werte sich von x^* entfernen. Für Chaos ist das noch zu wenig, da die Folge in einen Grenzykel konvergiert und die Abweichung regulär ist. Für andere Funktionen sieht das ganz anders aus: So führt etwa die Iteration von

¹⁰ Loistl, O. u.a (1996): Chaostheorie zur Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme, S. 17, 18

$4 \cdot x(1-x)$ bei den meisten Startwerten zwischen 0 und 1 zu Ergebnissen, die für jeden Schritt leicht zu berechnen sind, deren Verteilung aber kein erkennbares Muster ergibt und die sich außerdem bei kleinsten Veränderungen komplett voneinander unterscheiden. Ein solches Verhalten wird deterministisches Chaos genannt. Die logistische Gleichung gilt generell als das einfachste Beispiel einer solchen Funktion.

3 Die Logistische Gleichung

3.1 Definition

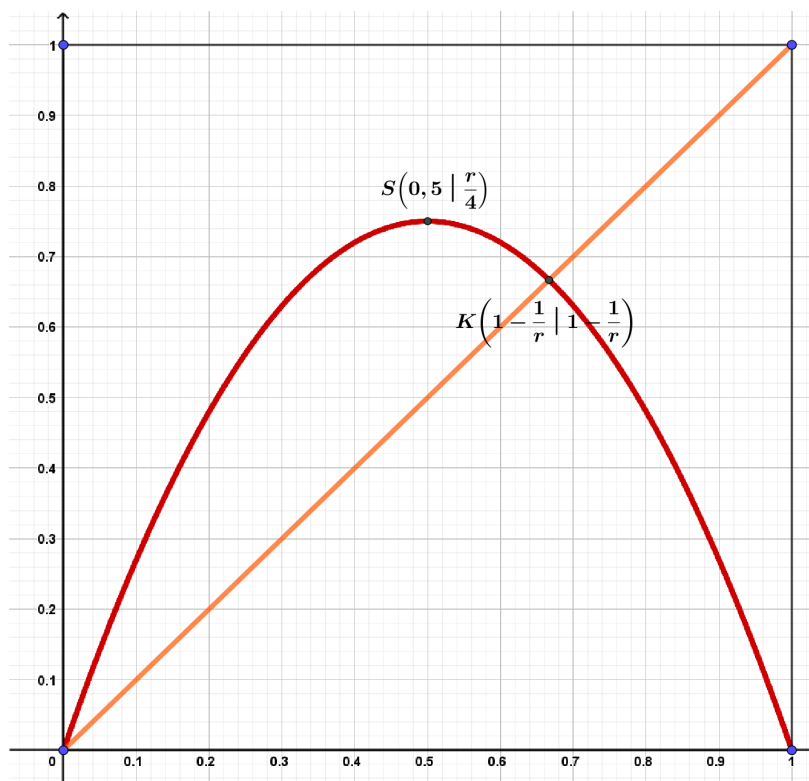


Bild 8

Die Logistische Gleichung beschreibt eine Zahlenfolge mit Abhängigkeit von einem Wachstumsparameter r . Ihre Definition lautet

$$x_{n+1} = r \cdot x_n (1 - x_n). \quad (4)$$

Sie ist die Umsetzung des Modells (2) von Verhulst aus 2.1 als Folge. Die Iterationsfunktion $w(x) = r \cdot x(1-x)$ ist dann, wie in Bild 8 dargestellt, eine nach unten geöffnete

Parabel mit den Nullstellen 0 und 1 und dem Scheitelpunkt $S\left(\frac{1}{2} \mid \frac{r}{4}\right)$.

Wenn w zwischen 0 und 1 liegt, folgt daraus, dass auch x_n zwischen 0 und 1 liegen.

In diesem Modell beschreibt x_n den Anteil einer theoretisch vorstellbaren Maximalpopulation, das heißt bei einer Maximalpopulation von beispielsweise 1000 Tieren, hieße $x_n=0,2$ eine Population von 200 Tieren. Diese Maximalpopulation ist theoretisch, weil der Faktor $(1-x_n)$ für $x_n=1$ zum sofortigen Aussterben führen würde (und für $x_n>1$ die Population sogar negativ werden würde). Daher kann der Wachstumsfaktor r nicht größer als 4 oder kleiner als 0 sein, weil beides in der Formel (4) zu negativen Populationen führen würde.

Die Abhängigkeit vom Wachstumsfaktor r in diesem Modell erscheint auf den ersten Blick nicht besonders interessant. Doch dieser Eindruck täuscht. Wenn man für irgend einen Startwert a die Funktion $f_a(r)=r \cdot a \cdot (1-a)$ betrachtet, dann ist $a \cdot (1-a)$ der Proportionalitätsfaktor, und f_a ist proportional zur Größe der Population und zum Abstand zur Maximalpopulation. Je größer nun r ist, umso größer ist die Kindpopulation. Doch bereits in der zweiten Generation sieht das komplett anders aus. Wenn die Kindpopulation zu groß ist, kommt es zum Verhungern und die Enkelpopulation ist wieder kleiner. Berechnet wird das durch die Iteration, denn der Endwert der Startpopulation ist der Startwert der Kindpopulation, also muss man für a das Ergebnis $f_a(r)$ einsetzen und man erhält:

$$\begin{aligned} f_{f_a(r)}(r) &= r f_a(r)(1-f_a(r)) \\ &= r \cdot r \cdot a \cdot (1-a)(1-r \cdot a \cdot (1-a)) \\ &= r^2(a-a^2)(1-r(a-a^2)) \\ &= -r^3(a-a^2)^2 + r^2(a-a^2) \end{aligned}$$

Plötzlich ist die Beziehung zwischen Eltern- und Kindpopulation nicht mehr so einfach. Und die Urenkelpopulation muss bereits mit

$$\begin{aligned} f_{f_{f_a(r)}}(r) &= r \cdot r \cdot f_a(r) \cdot (1-f_a(r))(1-r \cdot f_a(r) \cdot (1-f_a(r))) \\ &= r \cdot r \cdot r \cdot a \cdot (1-a) \cdot (1-r \cdot a \cdot (1-a))(1-r \cdot r \cdot a \cdot (1-a) \cdot (1-r \cdot a \cdot (1-a))) \\ &= r^3(a-a^2)(1-r(a-a^2))(1-r^2(a-a^2)(1-r(a-a^2))) \\ &= r^3((a-a^2)-r(a-a^2)^2(1-r^2(a-a^2)+r^3(a-a^2)^2)) \\ &= r^3((a-a^2)-r(a-a^2)^2-r^2(a-a^2)^2+r^3(a-a^2)^3+r^3(a-a^2)^3-r^4(a-a^2)^4) \\ &= r^3(-r^4(a-a^2)^4+2r^3(a-a^2)^3-r^2(a-a^2)^2-r(a-a^2)^2+(a-a^2)) \\ &= -r^7(a-a^2)^4+2r^6(a-a^2)^3-r^5(a-a^2)^2-r^4(a-a^2)^2+r^3(a-a^2) \end{aligned}$$

berechnet werden. Spätestens hier wird klar, dass man diese Funktionen besser mit einem Rechner betrachten sollte und eine andere Notation für $f_{f_{f_a(r)}}(r)$ benötigt wird. Deshalb wird im Folgenden für die i -te Iteration $f_a^{(i)}$ verwendet. Die ersten sieben Generationen sind in Bild 9 dargestellt.

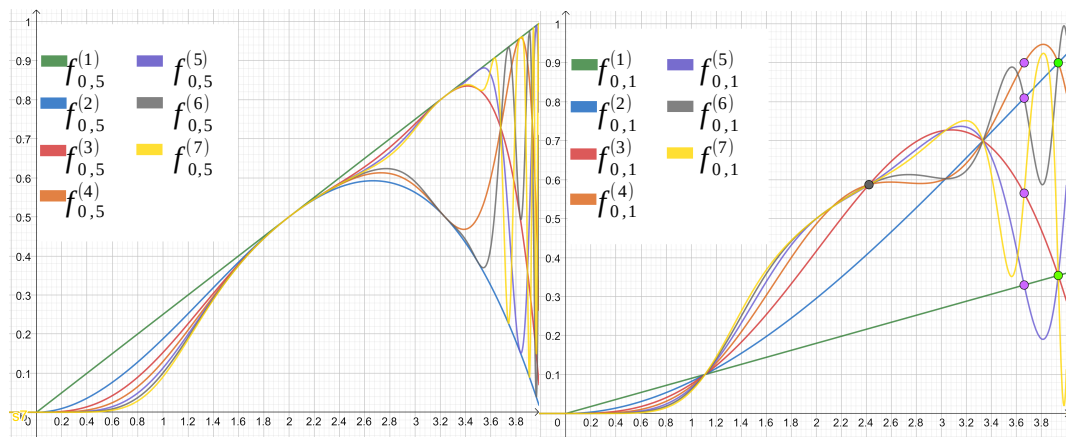


Bild9

b,

a

Was lässt sich über die Abhängigkeit der Populationsentwicklung von r sagen? Da immer nur $r \cdot a(1-a)$ für a eingesetzt wird, sind alle $f_a^{(i)}$ ganzrationale Funktionen. Allerdings werden die Funktionen schnell kompliziert, $f_a^{(7)}(r)$ hat als höchsten Exponenten bereits r^{127} . Trotzdem fallen einige Eigenschaften sofort auf:

1. Die Werte der $f_a^{(i)}(r)$ bleiben für $0 < r < 4$ zwischen 0 und 1. Das kann mit ihrer Definition erklärt werden, da $f_a(r)$ als Funktion von a das Intervall $[0,1]$ in sich abbildet. Wenn also der Ausgangswert a zwischen 0 und 1 liegt, ist auch $f_a(r)$ zwischen 0 und 1. Da im nächsten Schritt $f_a(r)$ die Rolle von a übernimmt, ändert sich das nie.
2. Wenn zwei aufeinanderfolgende Funktionen $f_a^{(i)}(r)$ und $f_a^{(i+1)}(r)$ sich an der Stelle r^* schneiden, dann treffen auch alle weiteren Funktionen diesen Schnittpunkt. Das kann man daran erkennen, dass $f_a^{(i)}(r^*)$ ein Fixpunkt von f_a sein muss, denn, wenn man f_a einmal auf die Stelle $f_a^{(i)}(r^*)$ anwendet, kommt wieder $f_a^{(i)}(r^*)$ heraus. Also kann man f_a beliebig oft anwenden, der Fixpunkt bleibt immer bei $f_a^{(i)}(r^*)$. Dies kann man in Bild 9a an dem schwarz markierten Punkt erkennen, bei welchem die ersten beiden Iterationen ihn nicht schneiden, jedoch alle folgenden.
3. Wenn sich $f_a^{(i)}(r)$ und $f_a^{(i+2)}(r)$ schneiden, dann gibt es an dieser Stelle einen Schnittpunkt für alle geraden Funktionen, die größer sind als i , und einen für

alle ungeraden, die größer sind als i . Dieses Verhalten entspricht dem der Funktionen unter Punkt 2 nur das hier $f_a^{(i)}(r)$ ein Fixpunkt bei zweimaliger Anwendung von f_a ist. Das kann man an den grün markierten Punkten in Bild 9a nachvollziehen.

4. Die gleiche Eigenschaft funktioniert offensichtlich auch bei dreimaliger oder k -maliger Anwendung. Die Konsequenz ist, dass die Graphen der $f_a^{(i)}$ sich ziemlich oft schneiden müssen, wenn i groß wird. Viele dieser Schnittpunkte scheinen bei $r > 3,7$ zu liegen. Bei Bild 9a sind das die vier lila markierten Punkte bei $r = 3,662$, wobei hier eine viermalige Wiederholung gezeigt wird. Da $f_a^{(8)}$ nicht dargestellt wird, hat die vierte Iteration keinen Schnittpunkt an dieser Stelle.
5. Wenn man a ändert, dann verändern sich alle Graphen und auch die Position der Schnittpunkte, wie man beim Vergleich der Bilder 9a und 9b erkennen kann. Als Beispiel wird die Stelle $r = 2$ betrachtet. Bei $a = 0,5$ (Bild 9b) ist $f_a(r) = f_{0,5}(2) = 2 \cdot 0,5(1 - 0,5) = 0,5 = a$, also ist $r = 2$ ein Fixpunkt. Dagegen ist bei $a = 0,1$ (Bild 9a) $f_a(r) = f_{0,1}(2) = 2 \cdot 0,1(1 - 0,1) = 0,18 \neq a$ offenbar $r = 2$ kein Fixpunkt.

3.2 Konvergenzverhalten

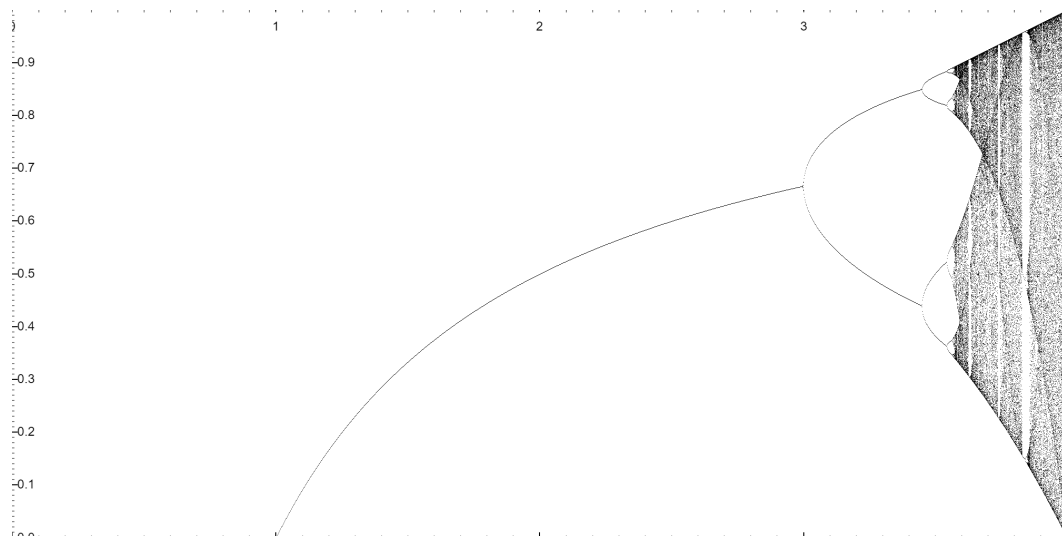


Bild 10

Es hat sich gezeigt, dass sich das Verhalten auf der Grundlage so weniger Iterationen nur schwer vorhersagen lässt. Einfacher als der Versuch, die Funktionen zu beschreiben, die bei vielfachen Iterationen entstehen, ist es, die Iteration punktweise durchzuführen,

also einfach die Gleichung $x_{n+1} = r \cdot x_n (1 - x_n)$ für verschiedene r zu iterieren. Um das Grenzverhalten zu zeigen, werden die ersten Iterationsschritte nicht dargestellt, da einige Schritte nötig sind, um Konvergenz zu erhalten. Dann wird r auf der horizontalen Achse und die x_n auf der vertikalen Achse aufgetragen, wobei ein Punkt umso dunkler dargestellt wird, je häufiger er in der Folge der x_n vorkommt. Die Wahl der vertikalen Achse für x wirkt zuerst ungewöhnlich, wird aber überall in der Literatur so verwendet. Als Resultat erhält man das Bifurkations- oder Feigenbaumdiagramm (Bild 10). Die oben dargestellte Abhängigkeit vom Startwert scheint auf den ersten Blick zu verschwinden¹¹. Das Diagramm sieht zudem anders aus als alles, was im Mathematikunterricht vorkommt. Für $r < 3$ scheint es der Graph einer Funktion zu sein, aber dann gibt es viele Verzweigungen und ab dem Punkt $r_\infty \approx 3.56995$ wechseln sich scheinbar ungeordnete mit geordneten Mustern ab.

11 Bei farbigen Darstellungen gibt es Unterschiede, für deren genaue Erörterung hier der Platz fehlt.

3.3 Informationen zum Feigenbaumdiagramm

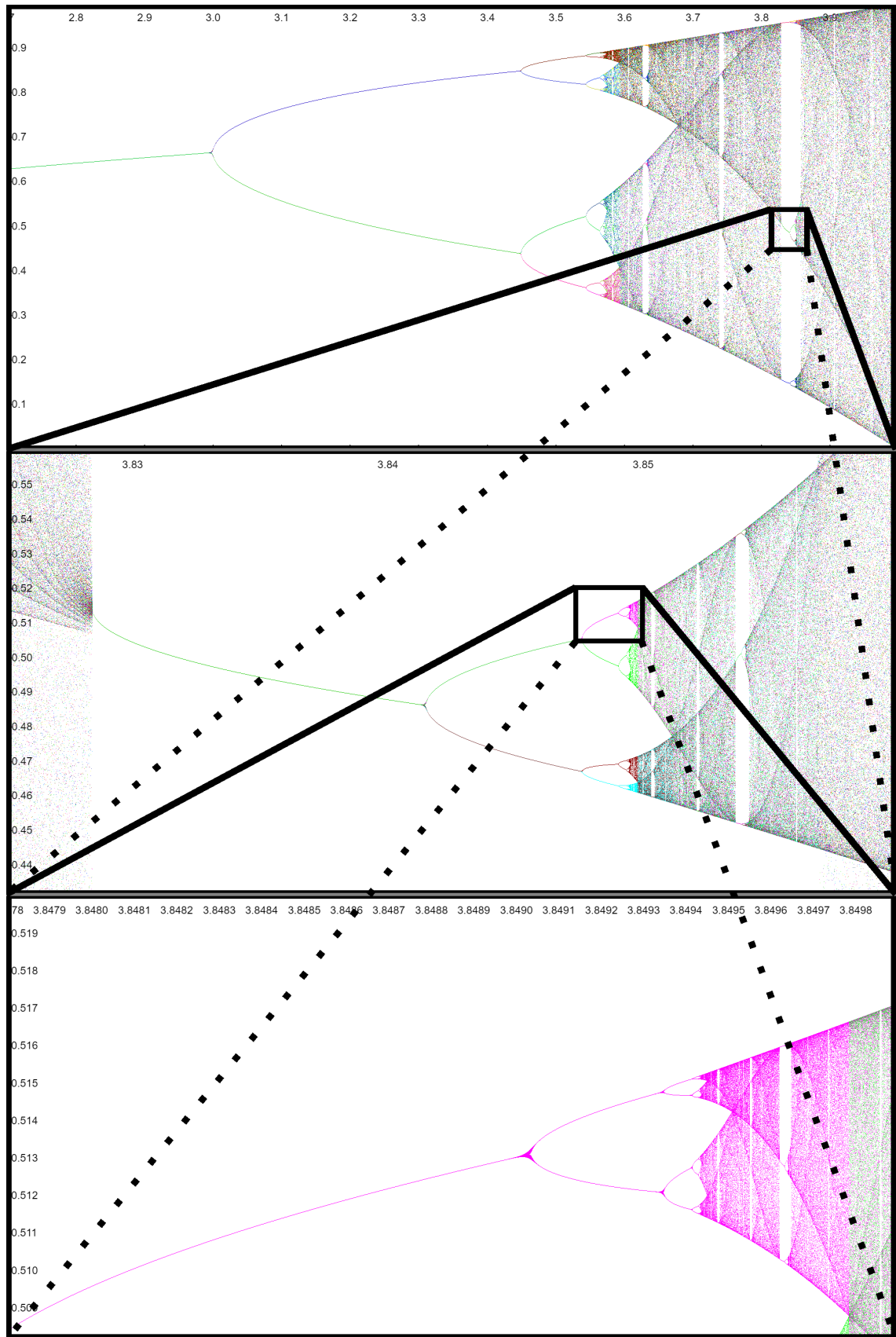


Bild 11

Dieses Diagramm ist in der Forschung intensiv untersucht worden. Der Akkumulationspunkt r_∞ ist mathematisch interessant und daher auf viele Stellen Genauigkeit bestimmt worden.¹² Während man die Verzweigung von einer auf zwei oder von zwei auf vier Linien in Bild 10 gut sehen kann, liegen die weiteren Verzweigungen immer dichter zusammen. Es ist bekannt, dass der Abstand Δ in r-Richtung zweier aufeinanderfolgender Verzweigungen bei jedem Schritt fast nur noch ein Fünftel des vorherigen Abstands ist, genauer gesagt gilt $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \approx 4,669202$. Der Grenzwert δ ist eine der beiden Feigenbaumkonstanten, benannt nach dem Physiker Mitchell Feigenbaum. Die andere Konstante α bezieht sich auf das Verhalten in x-Richtung. Das Besondere an diesen Konstanten ist ihre Universalität. Es gibt nicht nur die noch zu beschreibende Selbstähnlichkeit des Feigenbaumdiagramms, die dadurch zu erklären ist, dass das Verzweigungs- (Bifurkations-)Verhalten an allen Stellen des Feigenbaumdiagramms übereinstimmt, sondern auch für fast alle anderen Funktionen mit nichtlinearem, vergleichbarem dynamischem Verhalten stimmen diese Grenzwerte mit denen der logistischen Gleichung überein, wodurch sich alle diese Diagramme sehr ähneln, was in 4.2 noch behandelt wird. Die Selbstähnlichkeit erklärt man am besten an einer Folge von Vergrößerungen: Im Bild 11 ist das Feigenbaumdiagramm zuerst für $2,7 < r < 4$ gezeichnet, und dann werden in den beiden Kästchen die angedeuteten Ausschnitte vergrößert: zuerst für $3,825 < r < 3,861$ und dann unten in Pink für $3,8477 < r < 3,85$. Beide Ausschnitte scheinen mit dem Original übereinzustimmen, also ist das ganze Diagramm quasi in vielen Ausschnitten enthalten.

4 Ausblick

4.1 Eigene Beobachtungen

In diesem Kapitel sollen einige der bekannten Aussagen über die logistische Gleichung mit Mitteln der Schulmathematik belegt oder mit einfachen errechneten Bildern numerisch nachvollziehbar gemacht werden.

Zuerst ein paar Vorüberlegungen zur grafischen Darstellung. Bild 12 zeigt den Bereich um $r=3$ in verschiedenen Iterationsstufen. Die ersten 20 Iterationen sind dabei in Rot dargestellt, die nächsten 80 wurden nicht dargestellt, die 20 größer als 100 sind in Grün und wieder 980 Iterationen nicht dargestellt, dann sind 20 in Blau und 9980 wieder

¹² <https://oeis.org/A098587>

nicht dargestellt. Schließlich werden die Iterationen 10000-10020 in Violett und die Iterationen 100000-100020 in Schwarz abgebildet.

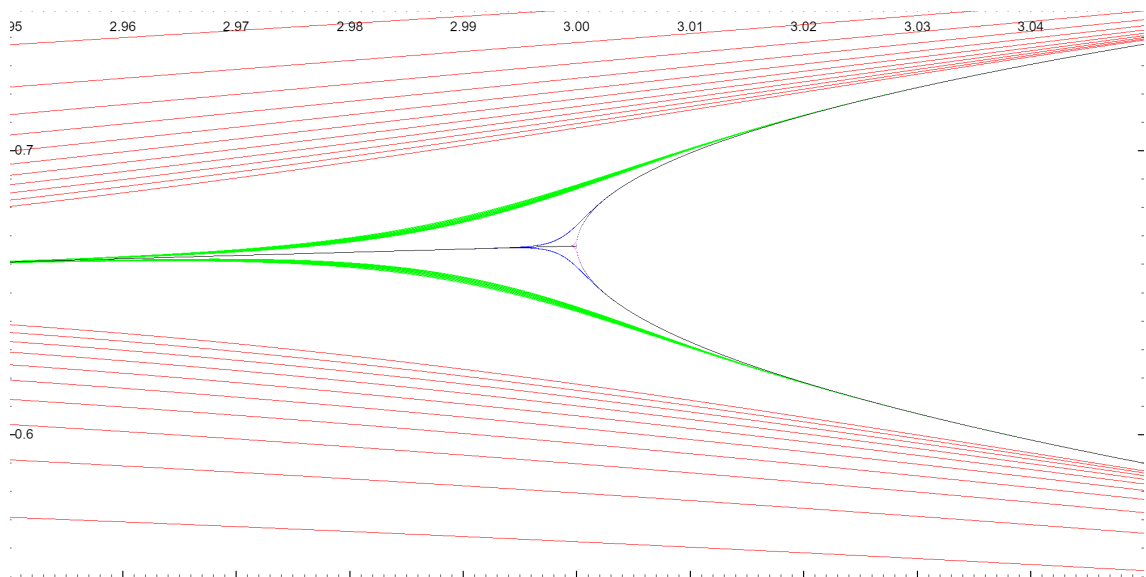


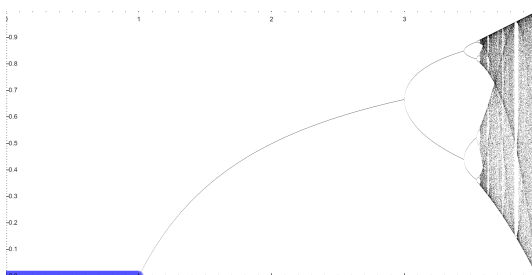
Bild 12

Es zeigt sich hier, dass die Konvergenz immer schlechter wird, je dichter r an 3 liegt. Im ganzen Bereich sind die ersten 20 Iterationen noch weit von Konvergenz entfernt. In diesem Bild ist die Auflösung in x-Richtung 0,004 pro Pixel. An den Rändern sind keine blauen und violetten Punkte sichtbar, weil sie von den schwarzen überdeckt wurden, also würden an diesen Stellen 1000 Iterationen genügen, um Konvergenz in dieser Auflösung zu zeigen. Nur für $2,91 < r < 3,05$ gibt es offenbar noch Unterschiede, da dort blaue und nur sehr wenige violette Punkte sichtbar werden; die Bifurkationspunkte sind aber auch mit der blauen Linie gut zu erkennen. Dementsprechend wurden die meisten der folgenden Bilder so angefertigt, dass die ersten 1000 Iterationen nicht und die folgenden Iterationen mit einer Deckkraft von 10% gezeichnet wurden. Meist waren dann etwa 400 Iterationen nötig, um ein gut erkennbares Bild zu zeichnen.

Viele der folgenden Überlegungen beziehen sich auf die grafische Iteration: Die logistische Gleichung wird durch das Spinnwebdiagramm beschrieben, bei dem die Spinne im Einheitsquadrat zwischen der Winkelhalbierenden $w(x)=x$ und dem Graphen von $f(x)=rx(1-x)$, also einer Parabel mit den Nullstellen 0 und 1, hin und her läuft. Aus Kapitel 2.4 ist bekannt, dass die Schnittpunkte Fixpunkte sind. Die Schnittpunkte auszurechnen ist einfach, indem man beide Funktionen gleichsetzt:

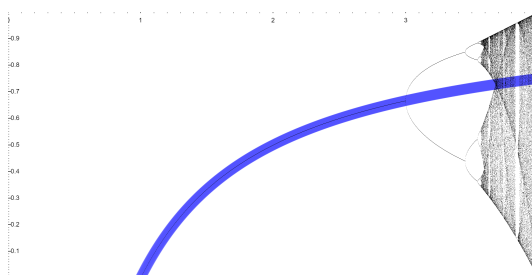
$$\begin{aligned}
f(x) &= w(x) \Leftrightarrow rx(1-x) = x \Leftrightarrow rx - rx^2 = x \\
\Leftrightarrow & \quad r - rx = 1 \Leftrightarrow -rx = 1 - r & \text{oder } x=0 \\
\Leftrightarrow x &= \frac{1-r}{-r} = \frac{r-1}{r} = 1 - \frac{1}{r} & \text{oder } x=0
\end{aligned}$$

Für die Konvergenz ist von Bedeutung, welche Fixpunkte Attraktoren und welche Repeller sind, da Konvergenz nur bei Attraktoren auftritt. Aus Kapitel 2.5 ist bekannt, dass ein Fixpunkt ein Attraktor ist, wenn für die zu iterierende Funktion $f(x)$ gilt, dass $|f'(x)| < 1$ ist. Dies soll zuerst für einige Abschnitte überprüft werden. Eingeleitet werden die Abschnitte mit kleinen Bildern, die den betrachteten Abschnitt des Bifurkationsdiagramms darstellen.



Im Abschnitt $0 < r < 1$ liegt $1 - \frac{1}{r}$ außerhalb des Intervalls $[0, 1]$, so dass nur der Fixpunkt bei $x=0$ betrachtet werden muss. Da $f(x) = rx - rx^2$ gilt, folgt $f'(x) = r - 2rx$. Damit ist $f'(0) = r$ und $|f'(0)| < 1$, wenn

$r < 1$ und $|f'(0)| > 1$, wenn $r > 1$, also ist $x=0$ nur im Intervall $(0, 1)$ ein Attraktor und dort der einzige Fixpunkt.



Für $1 < r < 4$ ist der andere Fixpunkt bei $x = 1 - \frac{1}{r}$. Um Konvergenz zu erhalten, muss $\left|f'\left(1 - \frac{1}{r}\right)\right| < 1$ sein. Das gilt wegen

$$f'\left(1 - \frac{1}{r}\right) = r - 2r\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 3 - 6\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 3 - 4 = -1 \quad \text{nur für } r < 3.$$

Zusammengefasst gibt es also für $0 < r < 3$ immer einen Fixpunkt, der Attraktor ist, was der einzelnen Linie im Bifurkationsdiagramm entspricht.

Für $3 < r < \approx 3.45$ gabelt sich die Linie. Wenn es sich um Konvergenz gegen einen Grenzyklus handelt und nicht um ein nichtperiodisches Wechseln zwischen zwei Werten, so muss das zweimalige Anwenden von f zwei Fixpunkte haben, die beide ein Attraktor sind. Um dies zu prüfen, sind zwei Schritte notwendig: Zuerst muss einer der beiden Fixpunkte x^* von $f^{(2)}$ in Abhängigkeit von r bestimmt werden. Dann wird berechnet, in welchem Bereich der Fixpunkt ein Attraktor ist, indem die Gleichung

$$|f^{(2)'}(x^*)| = 1 \quad \text{gelöst wird. Es gilt:}$$

$$\begin{aligned}
f^{(2)}(x) &= rrx(1-x)(1-rx(1-x)) = (r^2x - r^2x^2)(1-rx+rx^2) \\
&= r^2x - r^2x^2 - r^3x^2 + r^3x^3 + r^3x^3 - r^3x^4 \\
&= -r^3x^4 + 2r^3x^3 - r^3x^2 - r^2x^2 + r^2x
\end{aligned}$$

Für Fixpunkte gilt $f^{(2)}(x) = x$ bzw. $f^{(2)}(x) - x = 0$ oder eingesetzt:

$$-r^3x^4 + 2r^3x^3 - r^3x^2 - r^2x^2 + r^2x - x = 0 \quad (5)$$

Die Gleichung (5) ist zwar vom Grad vier, sie kann aber zu einer quadratischen Gleichung vereinfacht werden, da 0 und $1 - \frac{1}{r}$ als Fixpunkte bekannt sind und daher die

beiden Faktoren $(x-0)$ und $(x - (1 - \frac{1}{r}))$ bzw. zusammengefasst $rx^2 - rx + x$ aus

$f^{(2)}(x) - x$ durch Polynomdivision abdividiert werden können:

$$\begin{aligned}
&(-r^3x^4 + 2r^3x^3 - r^3x^2 - r^2x^2 + r^2x - x) : (rx^2 - rx + x) = -r^2x^2 + r^2x + rx - r - 1 \\
&\underline{-(-r^3x^4 + r^3x^3 - r^2x^3)} \\
&\quad r^3x^3 + r^2x^3 \\
&\quad \underline{-(r^3x^3 + r^2x^3 - r^3x^2 - r^2x^2 + r^2x^2 + rx^2)} \\
&\quad\quad 0 - r^2x^2 - rx^2 + r^2x - x \\
&\quad\quad \underline{-(-r^2x^2 - rx^2 + r^2x + rx - rx - x)} \\
&\quad\quad\quad 0
\end{aligned}$$

womit sich (5) zu $-r^2x^2 + r^2x + rx - r - 1 = 0$ bzw.

$$x^2 - \frac{r+1}{r}x + \frac{r+1}{r^2} = 0 \quad (5^*)$$

vereinfacht. Mit der pq-Formel ergibt sich dann als Lösung von (5*):

$$\begin{aligned}
x_{1,2}^* &= \frac{r+1}{2r} \pm \sqrt{\left(\frac{r-1}{2r}\right)^2 - \frac{r+1}{r^2}} = \frac{r+1}{2r} \pm \sqrt{\frac{r^2 - 2r + 1}{4r^2} - \frac{4r + 4}{4r^2}} \\
&= \frac{1 + r \pm \sqrt{-3 - 2r + r^2}}{2r}
\end{aligned} \quad (6)$$

Diese beiden Gleichungen beschreiben die beiden Zinken der Gabel.¹³ Man erkennt hier, dass der Radikand im Intervall für $r < 3$ negativ wird, so dass die Lösung nur für $r > 3$ reell ist, was der linken Grenze der Gabel entspricht.

Um die rechte Grenze zu finden, muss der Wechsel vom Attraktor zum Repeller, die Lösung von $|f^{(2)}(x)| = 1$ bestimmt werden, wobei für x eine der beiden Lösungen x^* eingesetzt werden muss. Gesucht wird also r mit $-1 = -4r^3x^3 + 6r^3x^2 - 2r^3x - 2r^2x + r^2$ und x wie in (6). Mit einem CAS¹⁴ kann man diese Gleichung lösen und erhält als einzige positive Lösung und damit als rechte Grenze $r = 1 + \sqrt{6}$. Auch wenn diese Lösung

¹³ Die Gleichung (6) unterscheidet sich von Loistl, S. 26, der offenbar einen Druckfehler in seiner Formel hat.

¹⁴ Berechnet mit dem Computer Algebra System (CAS) WolframAlpha: https://www.wolframalpha.com/input/?i=1-2r%5E3*x%2B6r%5E3*x%5E2-4r%5E3*x%5E3%2Br%5E2-2r%5E2*x%3D0+and+x%3D1%2F%282r%29*%28r%2B1%2Bsqrt%28r%5E2-2r-3%29%29

mit Mitteln der Schulmathematik nicht zu finden ist, kann man eine Probe durchführen.

Dazu vereinfacht man zuerst den Fixpunkt $x^* = \frac{1+r+\sqrt{-3-2r+r^2}}{2r}$ mit $r=1+\sqrt{6}$ zu

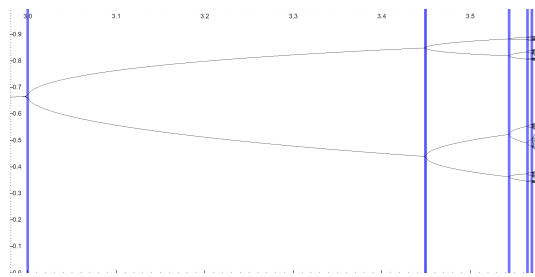
$$\begin{aligned} x^* &= \frac{1+1+\sqrt{6}+\sqrt{-3-2(1+\sqrt{6})+(1+\sqrt{6})^2}}{2(1+\sqrt{6})} \\ &= \frac{(1+1+\sqrt{6}+\sqrt{-3-2-2\sqrt{6}+1^2+2\sqrt{6}+\sqrt{6}^2})(1-\sqrt{6})}{2(1+\sqrt{6})(1-\sqrt{6})} \\ &= \frac{1}{2(1-6)}(1+1+\sqrt{6}+\sqrt{2})(1-\sqrt{6}) \\ &= -\frac{1}{10} \cdot (1-\sqrt{6}+(1-6)+\sqrt{2}-\sqrt{12}) \\ &= \frac{1}{10} \cdot (4+\sqrt{6}-\sqrt{2}+2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Das Ergebnis $x = \frac{1}{10} \cdot (4+\sqrt{6}-\sqrt{2}+2\sqrt{3})$ wird eingesetzt und aufgelöst:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4r^3x^3 + 6r^3x^2 - 2r^3x - 2r^2x + r^2 \\ &= -4(1+\sqrt{6})^3 \left(\frac{1}{10} \cdot (4+\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{12}) \right)^3 + 6(1+\sqrt{6})^3 \left(\frac{1}{10} \cdot (4+\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{12}) \right)^2 \\ &\quad - 2(1+\sqrt{6})^3 \left(\frac{1}{10} \cdot (4+\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{12}) \right) - 2(1+\sqrt{6})^2 \left(\frac{1}{10} \cdot (4+\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{12}) \right) \\ &\quad + (1+\sqrt{6})^2 \\ &= -(28+16\sqrt{2}+12\sqrt{3}+12\sqrt{6}) + (54+24\sqrt{2}+18\sqrt{3}+24\sqrt{6}) \\ &\quad - (26+7\sqrt{2}+4\sqrt{3}+11\sqrt{6}) - (8+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+3\sqrt{6}) \\ &\quad + (7+2\sqrt{6}) \\ &= (-28+54-26-8+7) + (-16+24-7-1)\sqrt{2} \\ &\quad + (-12+18-4-2)\sqrt{3} + (-12+24-11-3+2)\sqrt{6} \\ &= -1+0\sqrt{2}+0\sqrt{3}+0\sqrt{6} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Man erhält, wie gefordert, -1. Damit wurde gezeigt, dass der Fixpunkt von $f^{(2)}(x)$ für $r > 1+\sqrt{6}$ zum Repeller wird und damit bei $r \approx 3,54$ die Doppelgabel entsteht. Im Prinzip könnte man dieses Verfahren natürlich auch für andere Gabelstellen durchführen, um zum Beispiel den Beginn der Vierer-Gabel bei $r \approx 3,544$ zu berechnen, aber da $f^{(4)}(x)$ bereits eine ganzrationale Funktion vom Grad 16 ist, wäre der Aufwand hierfür sehr hoch.

Eine weitere Alternative zur Bestimmung weiterer Gabelpunkte sind Näherungsverfahren. So kann man etwa in Geogebra sehr leicht einen Schieberegler für r erstellen, den ersten Schnittpunkt größer als 0 berechnen und dessen x-Wert in die Ableitung von $f^{(4)}$ einsetzen. Damit kann man mit sehr geringem Aufwand $r \approx 3.54409036$ als nächsten Gabelpunkt nach $1+\sqrt{6}$ annähern.



Die r -Werte, bei denen ein Fixpunkt sich in zwei aufteilt, heißen Bifurkationspunkte. Diese Werte sind in diesem Zusammenhang von Bedeutung, da im vorigen Abschnitt drei aufeinanderfolgende Bifurkationspunkte be-

rechnet wurden. Die Feigenbaumkonstante δ ist durch diese Abstände wie oben auf Seite 11 definiert, und mit den drei Punkten kann δ_1 durch

$$\delta_1 = \frac{1 + \sqrt{6} - 3}{3.54409036 - (1 + \sqrt{6})} \approx 4,751 \text{ berechnet werden. Für den nächsten Bifurkations-}$$

punkt ist dieses Verfahren nicht geeignet, da $f^{(8)}$ die Möglichkeiten von Geogebra übersteigt.

Es bleibt kaum etwas anderes übrig, als das Bifurkationsdiagramm selber zu zeichnen. Für die Bestimmung der Bifurkationspunkte ist das allerdings aufwendig, da die Konvergenz in der Nähe dieser Punkte besonders schlecht ist. Mit ca. 100000 Iterationen findet man näherungsweise die Schranken $3,564405 < r < 3,56441$ und damit

$$\delta_2 = \frac{3.54409036 - (1 + \sqrt{6})}{3,56441 - 3.54409036} \approx 4,656, \text{ was einer Genauigkeit von drei Stellen entspricht.}^{15}$$

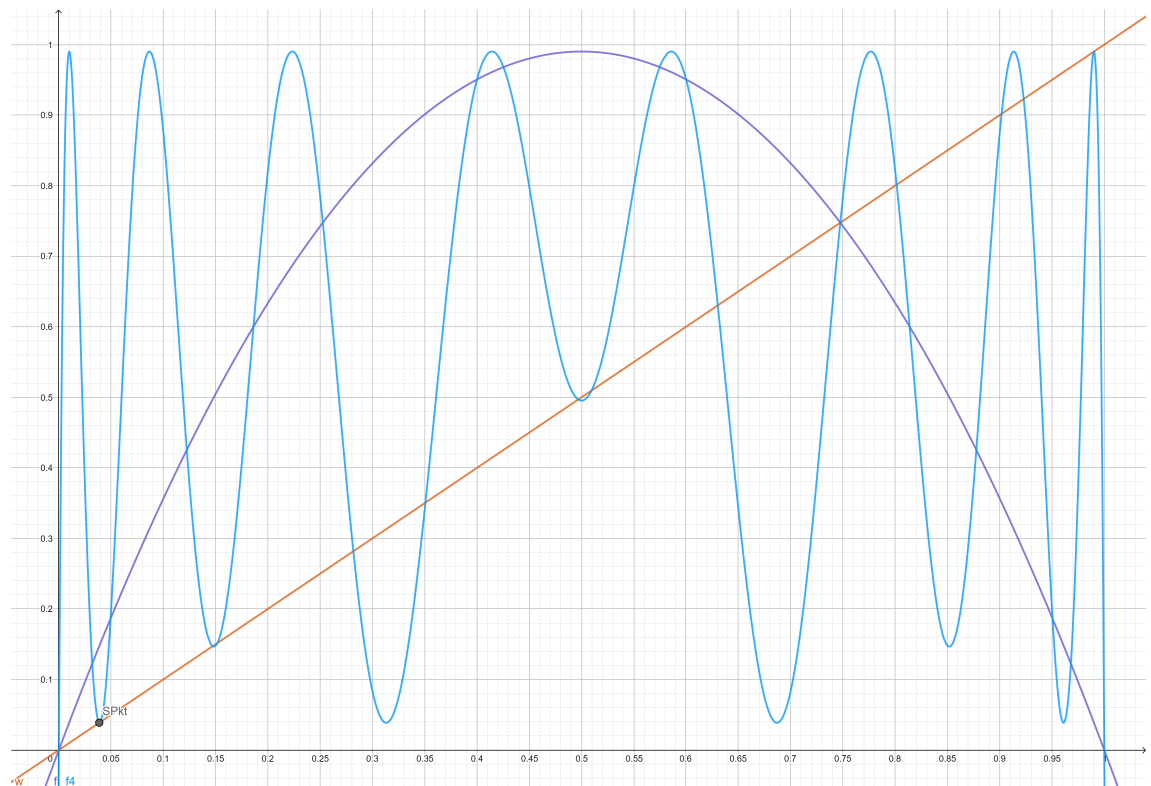


Bild 13

15 Shivamoggi, B.-K.(1997) Nonlinear Dynamics and Chaotic Phenomena, An Introduction, S. 291

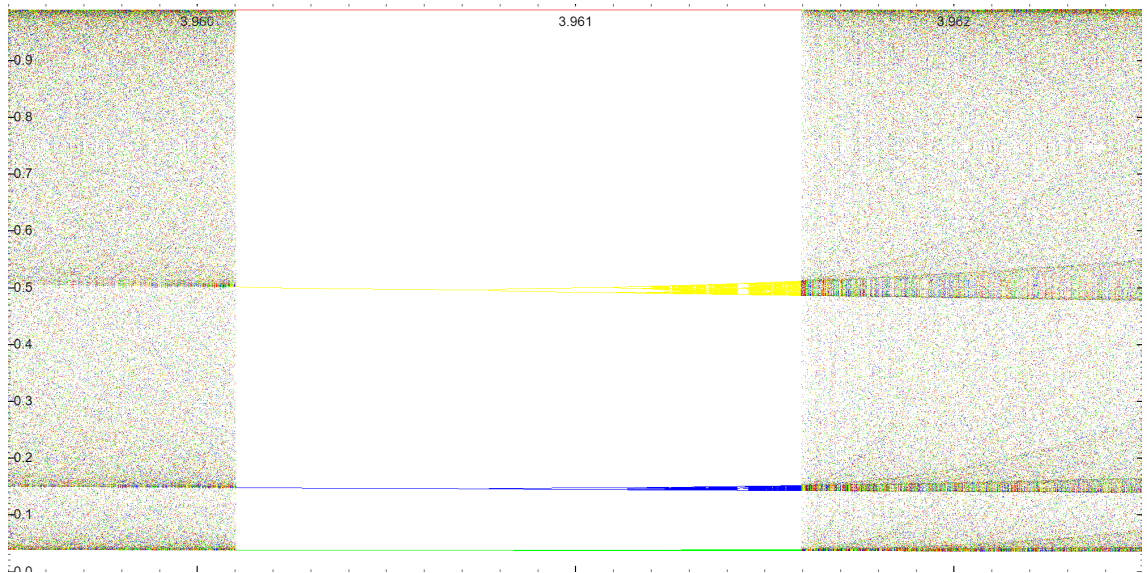


Bild 14

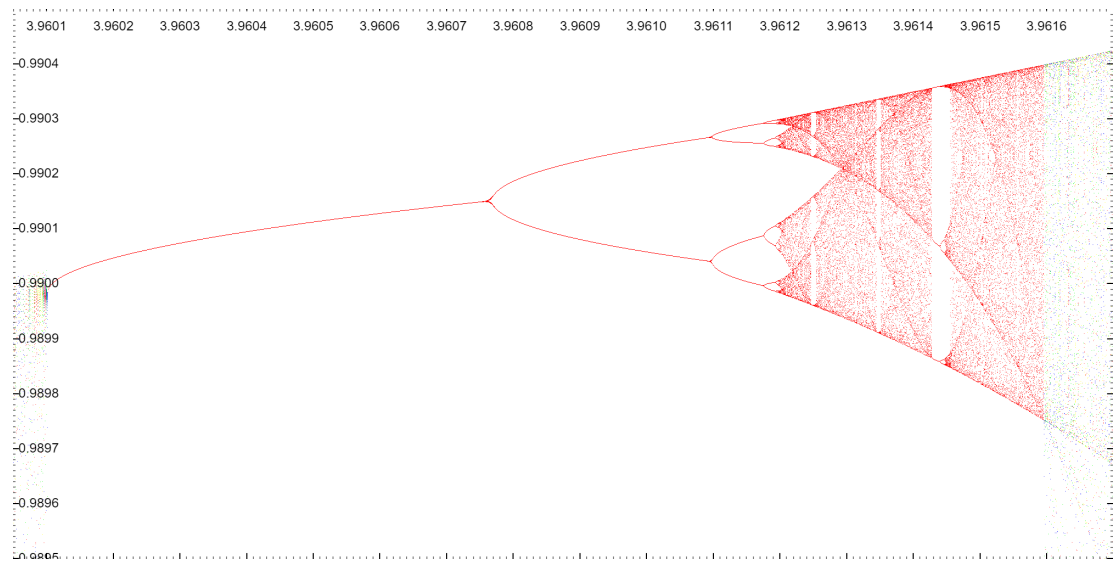


Bild 15

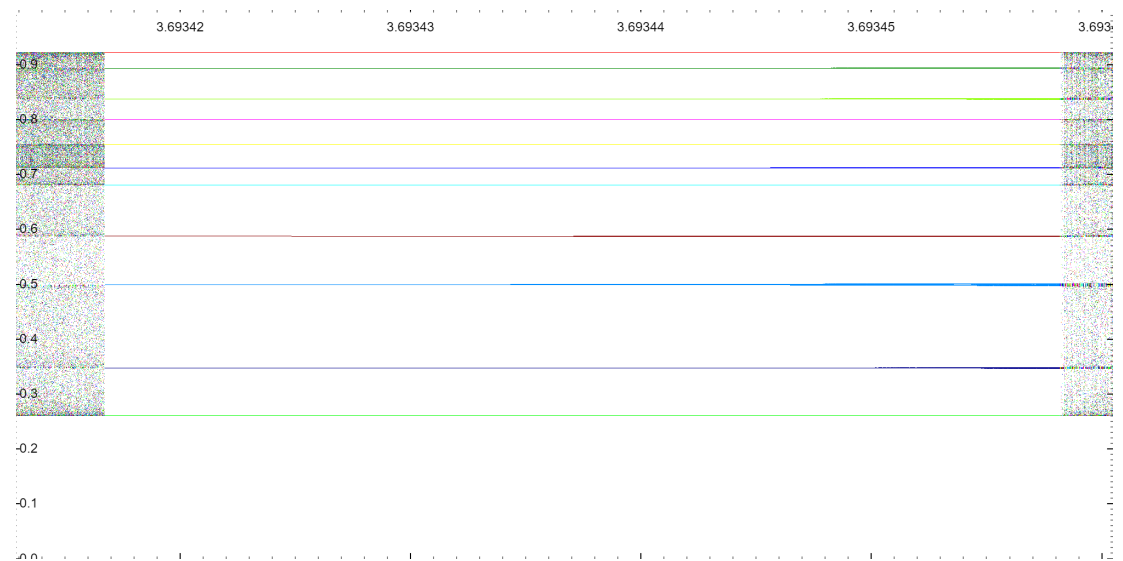
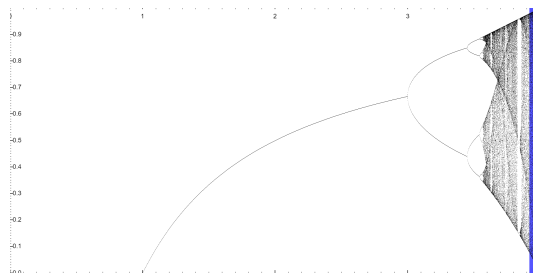


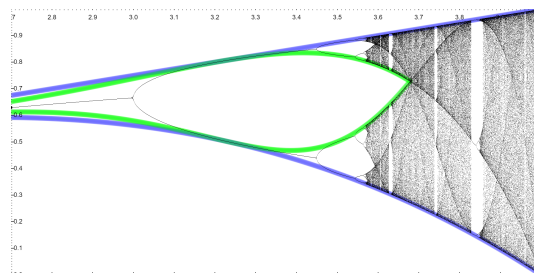
Bild 16



Wenn man das Verhalten bei $f^{(4)}$ genau betrachtet, fällt auf, dass es noch zwei weitere Tiefpunkte gibt, die die Winkelhalbierende berühren könnten. Da nur dann ein Attraktor vorliegt, wenn $|f'(x)| < 1$ ist, interessiert

nur die Umgebung von Berührungspunkten, weil die Ableitung betragsmäßig viel zu groß ist. Wenn man diese in Geogebra genau betrachtet, findet man vier weitere Berührungspunkte bei $3,960093 < r < 3,960765$ siehe (Bild 13). Diese Situation soll auch noch einmal im Bifurkationsdiagramm in Bild 14 betrachtet werden. Um die Konvergenz zu einem Zykel deutlich zu machen, wurde hier ein Farbwechsel vorgenommen: Die Pixel werden unterschiedlich gefärbt, je nachdem ob sie bei Division durch 4 den Rest 0,1,2 oder 3 ergeben. Hier erkennt man vier getrennte Farben im Bereich $3,9601 < r < 3,9615 - d9$. In Bild 15 wird die obere rote Linie noch einmal aufgelöst: Auf einer Breite von 0,0007 findet sich eine komplett wirkende Kopie des gesamten Bifurkationsdiagramms wieder. Da Bild 14 eine vertikale Auflösung von 0,001 hat, ist die Breite in diesem Diagramm tatsächlich geringer als ein Pixel. Während in dem chaotischen Bereich alle Farben vorkommen, besteht das kleine Feigenbäumchen nur aus roten Pixeln – ein klarer numerischer Beleg für die Periode 4, die ja mathematisch schon gezeigt wurde.

Im Feigenbaumdiagramm fallen viele fast komplett weiße Streifen auf. Jeder Streifen entspricht einem Bereich mit Grenzyklen unterschiedlicher Längen. Durch unterschiedliches Einfärben findet man solche Zyklen leicht, indem man z.B. den elf möglichen Resten bei Division durch 11 auch elf unterschiedliche Farben zuordnet, wie in Bild 16 dargestellt.



Das Feigenbaumdiagramm zeichnet sich dadurch aus, dass es Bereiche gibt, in denen das Chaos herrscht, und Bereiche, die berechenbar sind. Während in Bild 14 eine Lücke für r betrachtet wurde, fällt auf, dass

es Bereiche für x (in Abhängigkeit von r) gibt, die frei von Punkten sind.

Der einfachste Fall dabei ist die obere Grenze: Da die grafische Iteration durch eine Parabel mit Scheitelpunkt $(\frac{1}{2}, \frac{r}{4})$ begrenzt wird, kann x offenbar bereits nach einem

Schritt nicht mehr größer als $\frac{r}{4}$ sein. Jede weitere Iteration ist auf Höhe eines Punktes

der Parabel, und damit ist die Gerade $x = \frac{r}{4}$ eine obere Schranke. Nach unten ist die Schranke offenbar der Graph von $x = r \cdot \frac{r}{4} \cdot (1 - \frac{r}{4})$. Im Populationsmodell liegt die Ursache darin, dass der Maximalwert bei $x = \frac{r}{4}$ liegt. Der kleinste mögliche Wert tritt in der direkt darauffolgenden Population ein, wenn das Problem des Verhungerns am stärksten ist. Mit der grafischen Iteration lässt sich das etwas präzisieren. Der minimale Wert ist der auf den Scheitelpunkt der Parabel folgende. Die Werte verkleinern sich bei der Iteration nur im Bereich $f(x) > x$. Ein noch kleinerer Wert wäre nur dann erreichbar, wenn der vorherige x-Wert größer wäre, dieser würde aber bei der vorherigen waagerechten Verbindung über dem Scheitelpunkt der Parabel verlaufen. Zusammengefasst gilt für die Grenzwerte von f , dass sie im Bereich $r \cdot \frac{r}{4} \cdot (1 - \frac{r}{4}) < x < \frac{r}{4}$ liegen. Die gleiche Art von Argument kann man aber auch auf $f(f(x))$ anwenden. Wenn die Werte bei $x = \frac{r}{4}$ starten, haben sie nach zwei weiteren Iterationen einen Minimalwert von $f(f(\frac{r}{4}))$, wodurch sich für den oberen Zweig eine Untergrenze von $x = r^2 \frac{r}{4} (1 - \frac{r}{4}) (1 - r \frac{r}{4} (1 - \frac{r}{4}))$ ergibt.

Analog gilt für Werte im unteren Zweig, die bei $f(\frac{r}{4})$ starten, dass ihr Maximalwert bei $f(f(f(\frac{r}{4}))) = r r r \frac{r}{4} (1 - \frac{r}{4}) (1 - r \frac{r}{4} (1 - \frac{r}{4})) (1 - r r \frac{r}{4} (1 - \frac{r}{4}) (1 - r \frac{r}{4} (1 - \frac{r}{4})))$ liegt. Grafisch wird dies in Bild 11 deutlich: bis zum Schnittpunkt gibt es eine klare Farbentrennung des unteren und des oberen Bereichs. Der Schnittpunkt liegt mit CAS¹⁶ berechnet bei $r_v = \frac{1}{3} (2 + \sqrt[3]{(152 - 24\sqrt{33})} + 2\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}) \approx 3.678573510428$. An dieser Stelle vereinigen sich also der obere und der untere Zweig.

16 Berechnet mit: https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+r%5E2*r*r%2F4*+%281-r%2F4%29*%281-r*r%2F4*+%281-r%2F4%29%29*%281-r*r*r%2F4*+%281-r%2F4%29*%281-r*r%2F4*+%281-r%2F4%29%29%29%3D+r*r%2F4*+%281-r%2F4%29*%281-r*r%2F4*+%281-r%2F4%29%29+for+r

4.2 Universalität

In diesem Kapitel werden einige andere Funktionen iteriert, die im betrachteten Iterationsbereich ein Maximum haben. Es ist bekannt, dass das Verhalten der logistischen Gleichung dem Verhalten von komplizierteren Funktionen ähnelt. So betrachtet Schuster¹⁷ $f(x) = r \cdot \sin(\pi \cdot x)$ und Boccara¹⁸ $g(x) = x \cdot e^{r \cdot (1-x)}$ und $h(x) = r \cdot x^2(1-x)$. Diese drei Iterationen, in den Bildern 17-19 dargestellt, weisen eine teilweise verblüffende Ähnlichkeit auf. Schuster hat dazu in einer Tabelle verdeutlicht, dass die Zyklen bei diesen Funktionen in derselben Reihenfolge auftauchen, was einen Teil der Ähnlichkeit erklärt. Trotzdem belegen diese Bilder, dass man mit der logistischen Gleichung nicht einen unbedeutenden Spezialfall betrachtet, sondern dass es sich dabei um einen typischen Fall für nichtlineares Bifurkationsverhalten handelt, was die Bedeutsamkeit der Untersuchungen unterstreicht. Als davon zu unterscheidender Fall eines linearen Bifur-

kationsverhaltens soll Bild 20 dienen, das die Funktion $\ell(x) = \begin{cases} \frac{r}{2} \cdot x & , x < \frac{1}{2} \\ \frac{r}{2} - \frac{r}{2} \cdot x & , x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ zeigt.

Diese stückweise lineare Funktion gibt ein Verhalten wieder, das die Abschnitte mit Grenzzykeln vermissen lässt und damit deutlich weniger interessant erscheint.

5 Fazit

In dieser Arbeit war es möglich, die logistische Gleichung mit einigen wichtigen Eigenschaften vorzustellen und eigene Untersuchungen dazu durchzuführen. Wie die Untersuchungen in Kapitel 4 verdeutlicht haben, können auch SuS einen Zugang zur logistischen Gleichung finden, zumal es sich dabei um ein ausgesprochen abwechslungsreiches Thema handelt. Einige theoretisch bekannte Fakten, wie etwa die Gabelung bei $1 + \sqrt{6}$, konnten nachgewiesen oder zumindest näherungsweise bestimmt werden. Die in dieser Arbeit angestellten elementaren Rechnungen bereichern die Forschungslage zwar nicht grundlegend, zeigen aber, dass sie für den Schulunterricht geeignet sind und belegen damit die Ausgangshypothese. Die Betrachtung nichtlinearer dynamischer Systeme am Beispiel der logistischen Parabel kann und sollte meines Erachtens einen Platz in der Schulmathematik finden.

17 Schuster, H.-G. (1989) Deterministisches Chaos, Eine Einführung S. 65.

18 Boccara, N. (2010): Modeling Complex Systems, S. 145, 161.

6 Literatur und Quellen

Körner, H. u.a (2019): Mathematik neue Wege eA, Braunschweig.

Verhulst, P.-F. (1838): Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, in: Correspondence mathématique e physique, 10(=S.3 T. 2), S. 113-121.

Robert May(10 Juni 1976): Simple mathematical models with very complicated dynamics, in Nature V. 261, S. 459–467

Loistl, O. u.a (1996): Chaostheorie, zur Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme

Boccara, N. (2010): Modeling Complex Systems

Schuster, H.-G. (1989) Deterministisches Chaos, Eine Einführung

Shivamoggi, B.-K.(1997) Nonlinear Dynamics and Chaotic Phenomena, An Introduction

7 Abbildungen

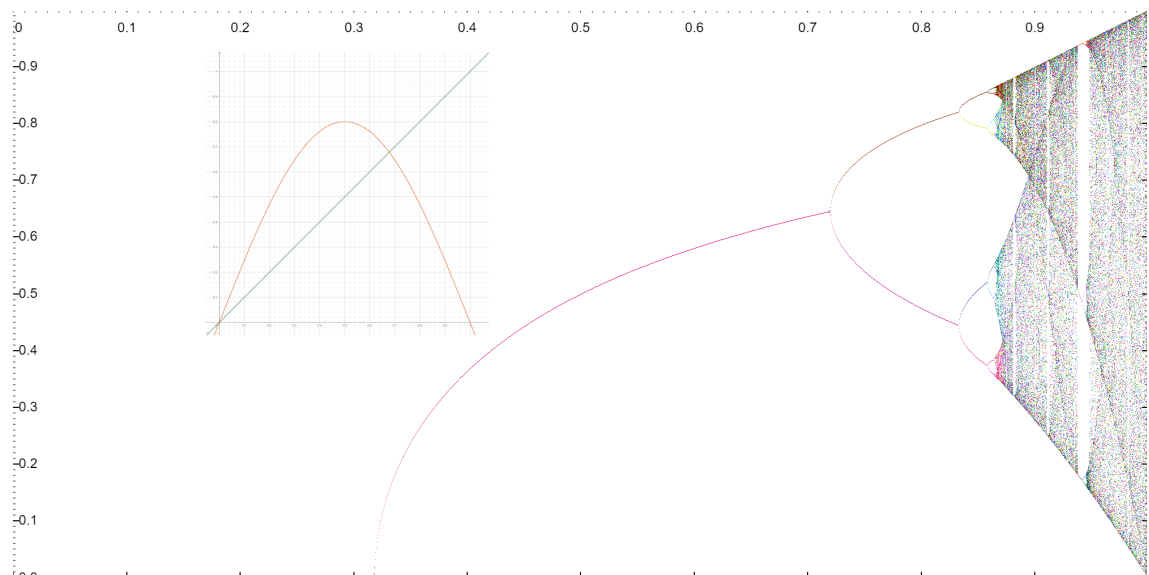


Bild 17

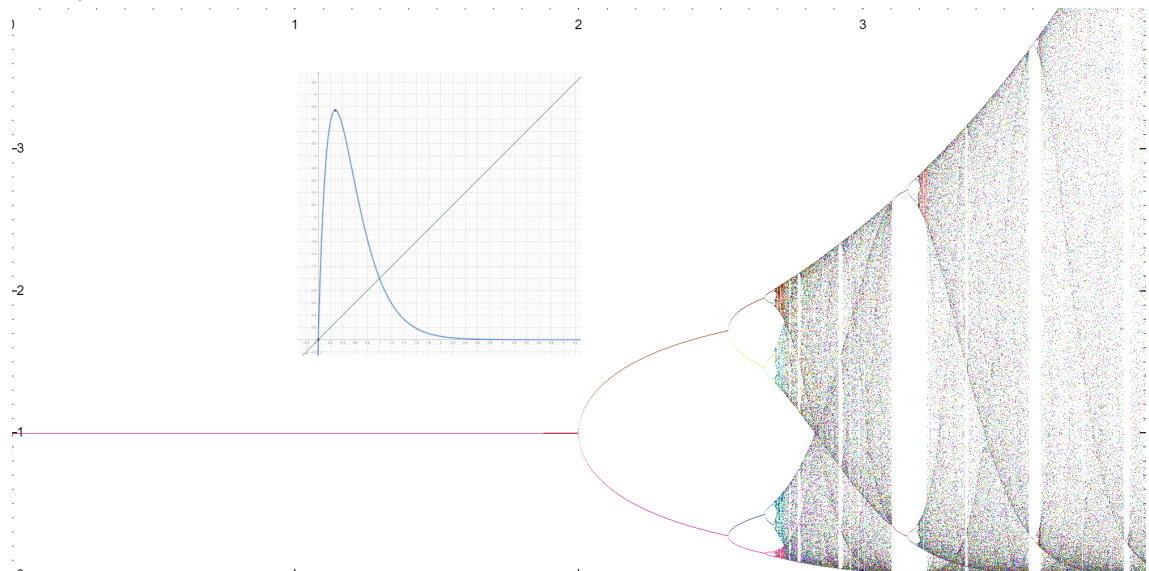


Bild 18

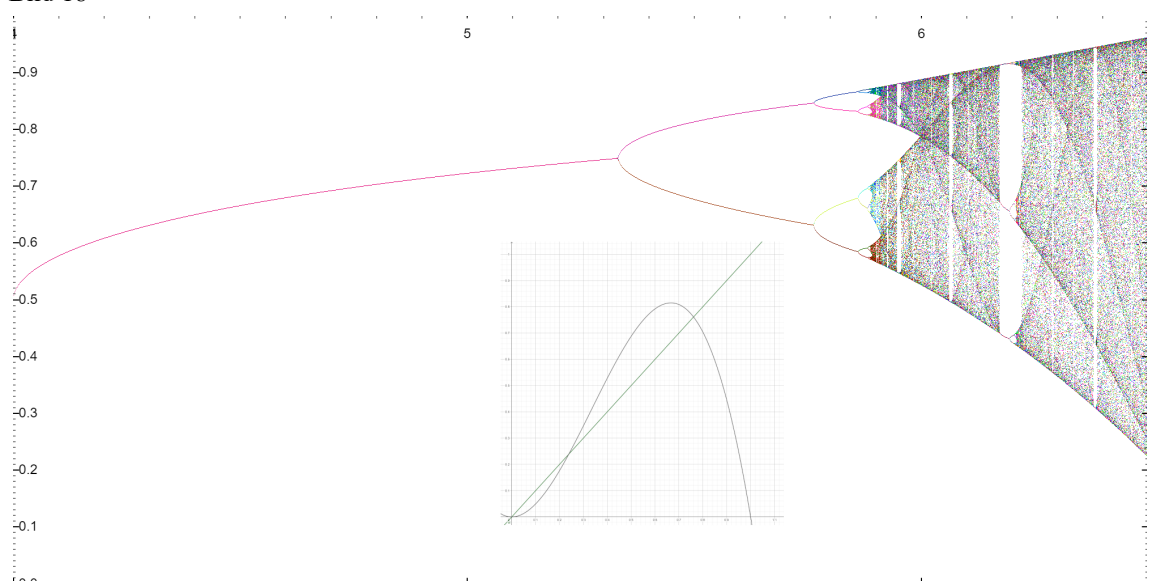


Bild 19

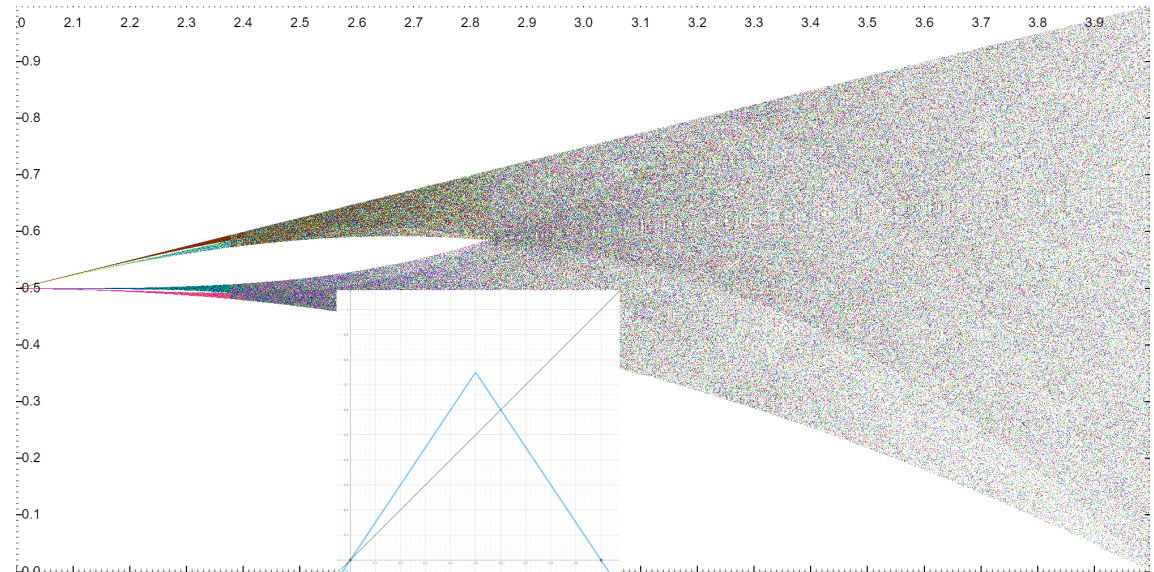


Bild 20

8 Schlusserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Insbesondere versichere ich, dass ich alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken als solche kenntlich gemacht habe.

Ort, Datum

Unterschrift